学校编码：10384　　　　　　　　　　　　　　分类号________密级_______

学号：19020131152658　　　　　　　　　　　　　　UDC________

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

Dual-Petrov-Galerkin方法与高阶有限元方法估计单向流方程Floquet因子效果对比

Dispersive Behaviour of Dual-Petrov-Galerkin Methods for the One-way Wave Equation Comparing with High Order Finite Element Schemes

居 文 瑜

指导教师姓名：　沈　捷　教授

专 业 名 称：　计 算 数 学

论文提交日期：　2016 年　4　月

论文答辩时间：　2016 年　5　月

学位授予日期：　2016 年　　月

答辩委员会主席：__________

评　　阅　　人：__________

2016 年　　月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘要

Mark Ainsworth(2014)曾针对单向流方程，利用高阶有限元方法构造离散波，考察它对于同速情况下的物理波的估计效果。文章不仅给出了详细的分析过程，更是得到了估计相应$Floquet$因子的相对误差的显性表达式，同时，将其与间断Galerkin方法下的相对误差结果进行了对比。然而，事实证明，无论是高阶有限元方法，还是间断Galerkin方法，它们的估计效果都是具有奇偶特性的。即是说，在多项式阶数为奇数和为偶数时，$Floquet$因子的相对误差具有不同的表达式，进一步来说，当多项式阶数不断增大时，此相对误差的精度并不是均匀变化的。由此，我们想要寻找另一种数值方法，进行同样的估计，以消除这种奇偶特性，得到与高阶有限元方法一致，甚至更好的估计效果。

针对这一想法，我们尝试使用了具有许多良好性质的Dual-Petrov-Galerkin方法来求解同一个单向流方程，得到相应的离散$Floquet$因子及其估计的相对误差。通过比较两种数值方法下$Floquet$因子估计的绝对误差和相对误差的阶数的具体数值结果，我们发现，Dual-Petrov-Galerkin方法很好地消除了高阶有限元方法估计时存在的奇偶特性，并在多项式阶数为偶数时，能够得到更好的估计效果。

关键词：Dual-Petrov-Galerkin方法；高阶有限元方法；$Floquet$因子

Abstract

Mark Ainsworth(2014)has studied the ability of high order numerical methods to propagate discrete waves at the same speed as the physical waves in the case of the one-way wave equation. His paper presents a detailed analysis of the finite element method including an explicit form for the discrete dispersion relation. And a comparison is made with the discontinuous Galerkin method with centred fluxes. However, it is shown that the accuracy of both of high order finite element scheme and discontinuous Galerkin method will be affected by the odd-even order of the polynomial degree. That is to say, the error estimates of discrete waves share different forms as degree of polynomials being odd and even. Moreover, the accuracy of error estimates changes heterogeneously when polynomial degree increases. Therefore, our intention is to find another method to do the same estimation without that difference.

In this paper, we try to use Dual-Petrov-Galerkin method which contains series of advantages to propagate discrete waves for the same equation and get the corresponding discrete Floquet multiplier and the relative accuracy of the approximation. By comparing the accuracy of the approximation of two methods, it's shown that Dual-Petrov-Galerkin method indeed avoids the difference in odd and even order of the polynomials-especially has better accuracy with even order.

Key Words: Dual-Petrov-Galerkin method; High order finite element scheme; Floquet multiplier

目 录

摘要 I

Abstract II

Contents V

第一章 引言 1

1.1 研究背景 1

1.2 问题描述 2

1.3 本文结构 2

第二章 准备知识 4

2.1 常用记号及性质 4

2.2 有限元方法介绍 5

2.2.1 区域的三角剖分 6

2.2.2 分段多项式子空间 6

2.2.3 基函数的构造 6

2.3 Dual-Petrov-Galerkin方法介绍 6

2.3.1 谱方法 7

2.3.2 正交多项式 7

2.3.3 Legendre多项式 9

2.3.4 Dual-Petrov-Galerkin方法的应用 10

2.3.5 Dual-Petrov-Galerkin方法的误差估计 11

第三章 高阶有限元方法下的Floquet因子 20

3.1 求解过程 20

3.2 Floquet因子的估计 27

第四章 Dual-Petrov-Galerkin方法下的Floquet因子 30

4.1 求解过程 30

4.2 Floquet因子的估计 33

第五章 具体数值结果对比 36

参考文献 38

致谢 40

Contents

Chinese Abstract I

English Abstract II

Chinese Contents III

1 Introduction 1

1.1 Research Background 1

1.2 Problem Description 2

1.3 Paper Structure 2

2 Preliminary Knowledge 4

2.1 Notations and Properties 4

2.2 Introduction of Finite Element Method 5

2.2.1 Triangulation 6

2.2.2 Piecewise-Polynomial Subspaces 6

2.2.3 Construction of Basis Functions 6

2.3 Introduction of Dual-Petrov-Galerkin Method 6

2.3.1 Spectral Method 7

2.3.2 Orthogonal Polynomials 7

2.3.3 Legendre Polynomials 9

2.3.4 Applications of Dual-Petrov-Galerkin Method 10

2.3.5 Error Estimates of Dual-Petrov-Galerkin Method 11

3 Floquet Multiplier in High Order Finite Element Scheme 20

3.1 Solutions and Proofs 20

3.2 Error Estimates of Floquet Multiplier 27

4 Floquet Multiplier in Dual-Petrov-Galerkin Method 30

4.1 Solutions and Proofs 30

4.2 Error Estimates of Floquet Multiplier 33

5 Comparison of Numerical Results 36

Acknowledgements 40

第一章　引言

1.1 研究背景

Mark Ainsworth(2014)曾针对单向流方程，利用高阶有限元方法得到离散波，估计同速情况下的物理波，更是给出了估计相应$Floquet$因子的相对误差的显性表达式，同时，将其与间断Galerkin方法下的相对误差结果进行了对比[1]。然而，事实证明，无论是高阶有限元方法，还是间断Galerkin方法，估计的效果都是具有奇偶特性的[1, 2]。即是说，在多项式阶数为奇数和为偶数时，$Floquet$因子的相对误差具有不同的表达式，进一步来说，当多项式阶数不断增大时，此相对误差的精度并不是均匀变化的。因此，我们想要寻找另一种数值方法来进行同样的估计，以消除这种奇偶特性，并得到与高阶有限元方法相同甚至更好的估计效果。

Jie Shen, Li-Lian Wang(2007)在利用Dual-Petrov-Galerkin方法求解线性双曲方程时，得到了较好的结果，并证明了该方法具有一系列良好的性质[3]。Dual-Petrov-Galerkin方法最早由Jie Shen(2003) 提出，用于解决三阶及以上奇数阶偏微分方程[4]。该方法基于双曲方程的自然变分形式，具有基于其他形式的方法所没有的优点。基本思想在于，选取试探函数($trial\ function$)满足偏微分方程的基本边界条件，选取检验函数($test\ function$) 满足对偶边界条件。这样得到的试探空间和检验空间能够保证在进行分部积分时，不会产生多余的边界项。进一步来说，如果两个空间的基函数能够有恰当的选择，对于常系数问题和良态的变系数问题，最后得到的线性系统将会是稀疏的。除此之外，Dual-Petrov-Galerkin方法在稳定性、误差分析和应用效率等方面，也具有一定的优势。

由此，我们尝试使用Dual-Petrov-Galerkin方法来求解之前的单向流方程，进行同样的估计。通过分析和计算，我们能够发现，该方法确实消除了高阶有限元方法下所存在的估计效果的奇偶特性，并在多项式阶数N为偶数时，有更好的估计效果。

1.2 问题描述

给定波速$c > 0$及适当的初值条件，考虑单向流方程

$$\partial_t u + c\,\partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{1.1}$$

该方程有一个关键性特征：对于每一个给定的时间频率ω，存在非平凡解

$$u(x,t) = e^{i\omega t}U(x) \tag{1.2}$$

其中，$U(x) = e^{-ikx}, k = \omega/c.$

波数k和时间频率ω之间的关系$k = \omega/c$为连续问题的扩散关系，而函数$U(x)$满足$Bloch$波条件

$$U(x+h) = \lambda U(x), \quad x \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

其中，$\lambda = e^{-ikh}$为$Floquet$因子。

采用恰当的数值方法，可求得方程的数值解$u_{h,N}(x,t)$，且该数值解满足与关系式(1.2)相似的形式

$$u_{h,N}(x,t) = e^{i\omega t}U_{h,N}(x) \tag{1.4}$$

其中，$U_{h,N}$属于所用数值方法所涉及的离散空间，且满足

$$U_{h,N}(x+h) = \lambda_{h,N}U_{h,N}(x), \quad x \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

其中，$\lambda_{h,N}$为依赖于网格间距h和数值方法所涉及的多项式阶数N的离散$Floquet$因子。

可通过考察离散$Floquet$因子估计真实$Floquet$因子的准确性，来考察所采用数值方法的估计效果。

定义该估计的相对误差为

$$R_{h,N} = \frac{\lambda - \lambda_{h,N}}{\lambda} \tag{1.6}$$

我们的目标即为考察不同数值方法下，该相对误差的表现。

1.3 本文结构

本文共分为三大部分：第二章介绍相关准备知识，包括文章中涉及到的

常用记号和性质、有限元方法的简单原理和Dual-Petrov-Galerkin方法的基本原理、简单应用和误差估计；第三章和第四章分别详细介绍高阶有限元方法和Dual-Petrov-Galerkin方法的具体求解过程；第五章基于具体数值结果，对两种数值方法的估计效果进行对比分析。

第二章　准备知识

求解偏微分方程的数值方法可划分为局部范畴和全局范畴两类。有限差分法和有限元方法基于局部变量，而谱方法则依赖于全局特征。具体应用时，有限元方法更加适用于具有复合几何形态的模型，而谱方法虽在区域灵活性上较差，但往往能达到更好的精度。另外，还有许多如hp有限元方法和谱元法等结合了局部方法和全局方法的优势的数值方法。[5]

本章介绍文章中所用到数值方法的相关准备知识，包括涉及到的常用记号及性质、数值方法的基本概念和相关原理，主要介绍Dual-Petrov-Galerkin方法。

2.1 常用记号及性质

(1)　$\overset{o}{K}$表示区域K的内部；∂K表示区域K的边缘；$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$

(2)

$$\mathbb{P}_k=\{\sum_{|\alpha|\le k}C_\alpha x_1^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_d},\,|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_d\}$$

(3)

$$C^0(\overline{\Omega})=\{u\in C(\overline{\Omega}):\,u|_{\partial\Omega}=0\}$$

(4)

$$L^2_\omega(a,b)=\{u:\int_a^b u^2\omega dx<+\infty\}$$

$$H^1(a,b)=\{u\in L^2(a,b):\partial_x u\in L^2(a,b)\}$$

$$H^1_0(a,b)=\{u\in H^1(a,b):u(a)=u(b)=0\}$$

(5)　$L^2_\omega(a,b)$上的内积$<\cdot,\cdot>$满足：

1. $<u,v>=<v,u>\quad\forall\, u,v\in L^2_\omega(a,b)$
2. $<v,v>\ge 0\quad\forall\, v\in L^2_\omega(a,b)$
3. $<v,v>=0\ \Leftrightarrow\ v=0$

(6)

$$\delta_{kj}=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$$

(7) P_N表示次数不超过N的多项式的集合

(8) $A\lesssim B$表示存在正常数c使得$A\leq cB$

(9) ($Cauchy$-$Schwarz$不等式)若$a_1,a_2,\ldots,a_n$和$b_1,b_2,\ldots,b_n$是任意实数，则有

$$(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k)^2\leq(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)(\sum_{k=1}^{n}b_k^2)$$

(10) ($Gronwall$不等式)设$h(t),y(t)$为定义在$[a,b]$上的连续实函数，$h(t)\geq 0$且单调不减，$c>0$，若对于一切$t\in[a,b]$，有

$$y(t)\leq h(t)+c\int_a^t y(s)ds$$

则

$$y(t)\leq h(t)e^{c(t-a)},\quad \forall\, t\in[a,b]$$

(10) 实数域上的$Gamma$函数定义为

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$$

并且，对于任意正整数n，有

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

2.2 有限元方法介绍

本节针对有限元方法的基本原理做简单的介绍，仅包括区域的三角剖分，有限维分段多项式子空间和它的基函数的构造。

2.2.1 区域的三角剖分

设多边形区域$\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$，若如下有限剖分

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \Gamma_h} K \tag{2.1}$$

满足，
每个K都为多面体，且$\overset{o}{K} \neq \emptyset$；
对于每个不同的区域$K_1, K_2 \in \Gamma_h$，有$\overset{o}{K}_1 \bigcap \overset{o}{K}_2 = \emptyset$；
如果$F = K_1 \bigcap K_2 \neq \emptyset$，那么$F$为$K_1$和$K_2$的公共面、公共线或公共顶点；
对于每一个$K \in \Gamma_h$，有$diam(K) \leq h$.

则Γ_h为$\overline{\Omega}$的三角剖分。

2.2.2 分段多项式子空间

有了区域的三角剖分，可根据剖分构造多项式子空间，最常用的空间为

$$X_h = X_h^k := \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) | v_{h|K} \in \mathbb{P}_k, \forall K \in \Gamma_h\}, \, k \geq 1 \tag{2.2}$$

2.2.3 基函数的构造

接下来构造空间X_h的基函数。记区域$\overline{\Omega}$被划分出的所有的点为$\mathbf{a}_j, j = 1, \ldots, N_h$，$N_h$为点的总数，则基函数$\varphi_i \in X_h^k$满足

$$\varphi_i(\mathbf{a}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, N_h \tag{2.3}$$

2.3 Dual-Petrov-Galerkin方法介绍

Dual-Petrov-Galerkin方法的提出，最早是用来求解三阶及以上的奇数阶偏微分方程[4]。该方法基于双曲方程的自然变分形式，具有基于其他形式的方法所没有的优点。基本思想在于，选取试探函数($trial\ function$)满足偏微分方程的基本边界条件，选取检验函数($test\ function$) 满足对偶边界条件。为了更好地介绍这一方法，本节会先针对谱方法的基本原理和相关正交多项式的性质，做简单的介绍，再详细介绍Dual-Petrov-Galerkin方法的应用和误差估计。

2.3.1 谱方法

简单来说，谱方法作为具有全局特征的数值方法，是用一列非常光滑的基函数的加权求和来估计目标函数，即

$$u(x) \approx \sum_{k=0}^{N} a_k \Phi_k(x) \tag{2.4}$$

其中，基函数$\Phi_k(x)$为多项式或三角函数。

实际应用中，基函数有多种选择。例如：

当$\Phi_k(x) = e^{ikx}$时，称为$Fourier$谱方法；

当$\Phi_k(x) = T_k(x)$时（$T_k(x)$为$Chebyshev$多项式），称为$Chebyshev$谱方法；

当$\Phi_k(x) = L_k(x)$时（$L_k(x)$为$Legendre$多项式），称为$Legendre$谱方法。

2.3.2 正交多项式

在谱方法的应用中，基函数的选择具有多样性，就不可避免地同时具有针对性。譬如$Fourier$谱方法就只适用于具有周期性边界条件的问题，如果将它运用到非周期性问题上，则会产生所谓的$Gibbs$现象。因此，针对非周期性问题，我们就需要用到正交多项式作为基函数。常用的正交多项式有$Legendre$多项式，$Chebyshev$多项式，$Hermite$多项式和$Laguerre$多项式。

首先给出正交和正交多项式的定义。

定义 2.1: 如果函数f和g满足

$$\langle f, g\rangle := (f, g)_\omega := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx = 0 \tag{2.5}$$

其中，ω为(a, b)上为正的某个固定的权函数。

则称f和g在带权$Sobolev$空间$L^2_\omega(a, b)$上正交。

易证，定义2.1中$\langle \cdot, \cdot\rangle$为$L^2_\omega(a, b)$上的内积。

定义 2.2: 如果n次多项式序列$\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$满足

$$\langle p_i, p_j\rangle = 0, \quad i \neq j \tag{2.6}$$

则称这一列多项式为正交多项式。